Practica 6

Derivadas parciales.

Problema 1

En los siguientes casos calcule el gradiente de la función y haga un esbozo de las curvas de nivel, donde muestre el valor del Gradiente en el punto indicado

a) $f(x, y) = y - x;\ (2, 1)$

b) $f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right);\ (1, 1)$

c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + z\ln(x);\ (1, 1, 1)$

Ejercicio 1

a) $f(x,y) = y - x;\ (2,1)$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = -1,\ \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} = 1 \ \Rightarrow\ \nabla \mathrm{f} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$z_0 = f(2,1) = \boxed{-1 \quad \text{nivel}}$$

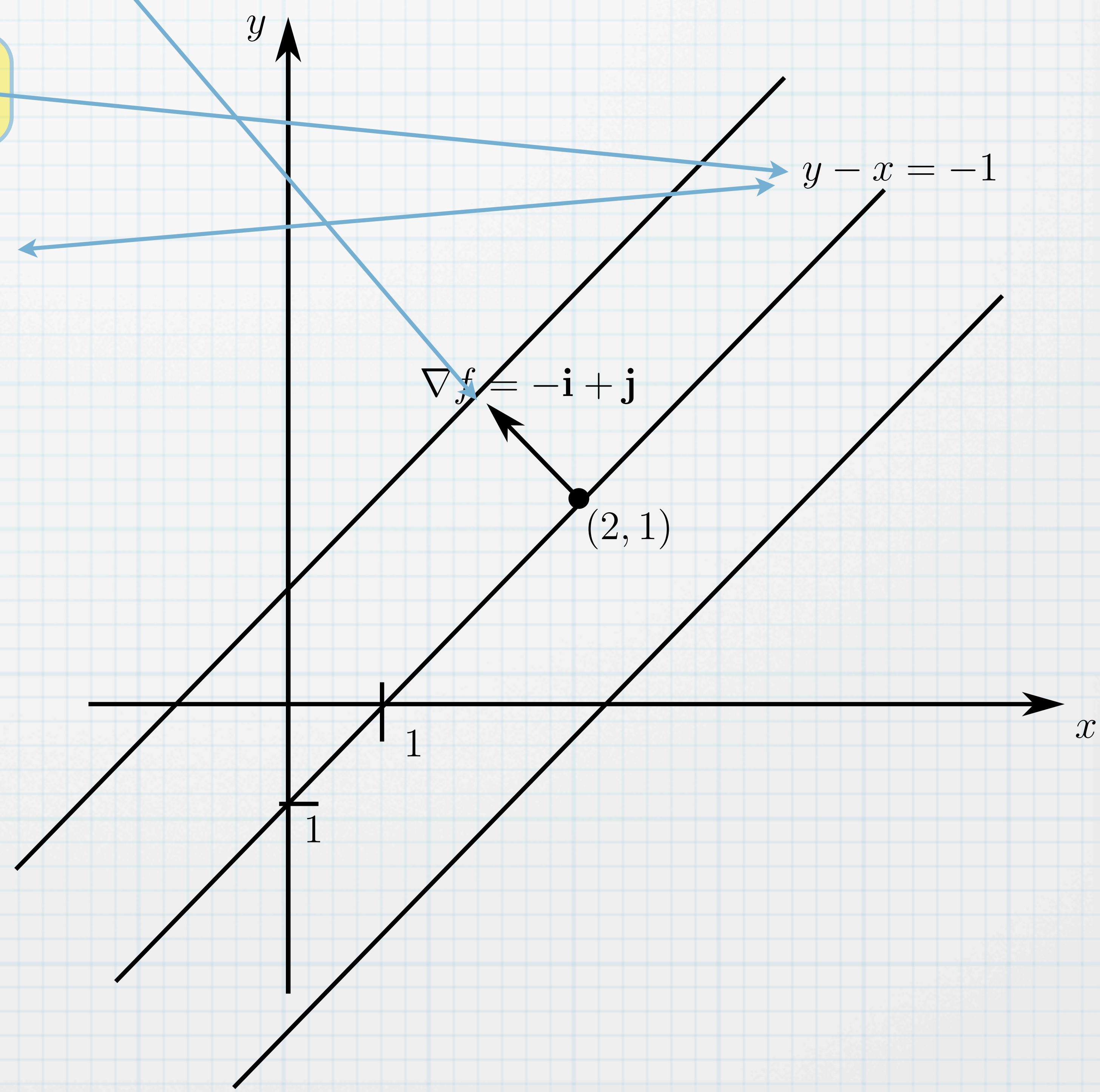
$$\boxed{-1 = y - x \quad \text{Curvas de nivel}}$$

a) $f(x,y) = y - x;\ (2,1)$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = -1,\ \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} = 1 \ \Rightarrow\ \nabla \mathrm{f} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$z_0 = f(2,1) =$ -1 **nivel**

$-1 = y - x$ **Curvas de nivel**

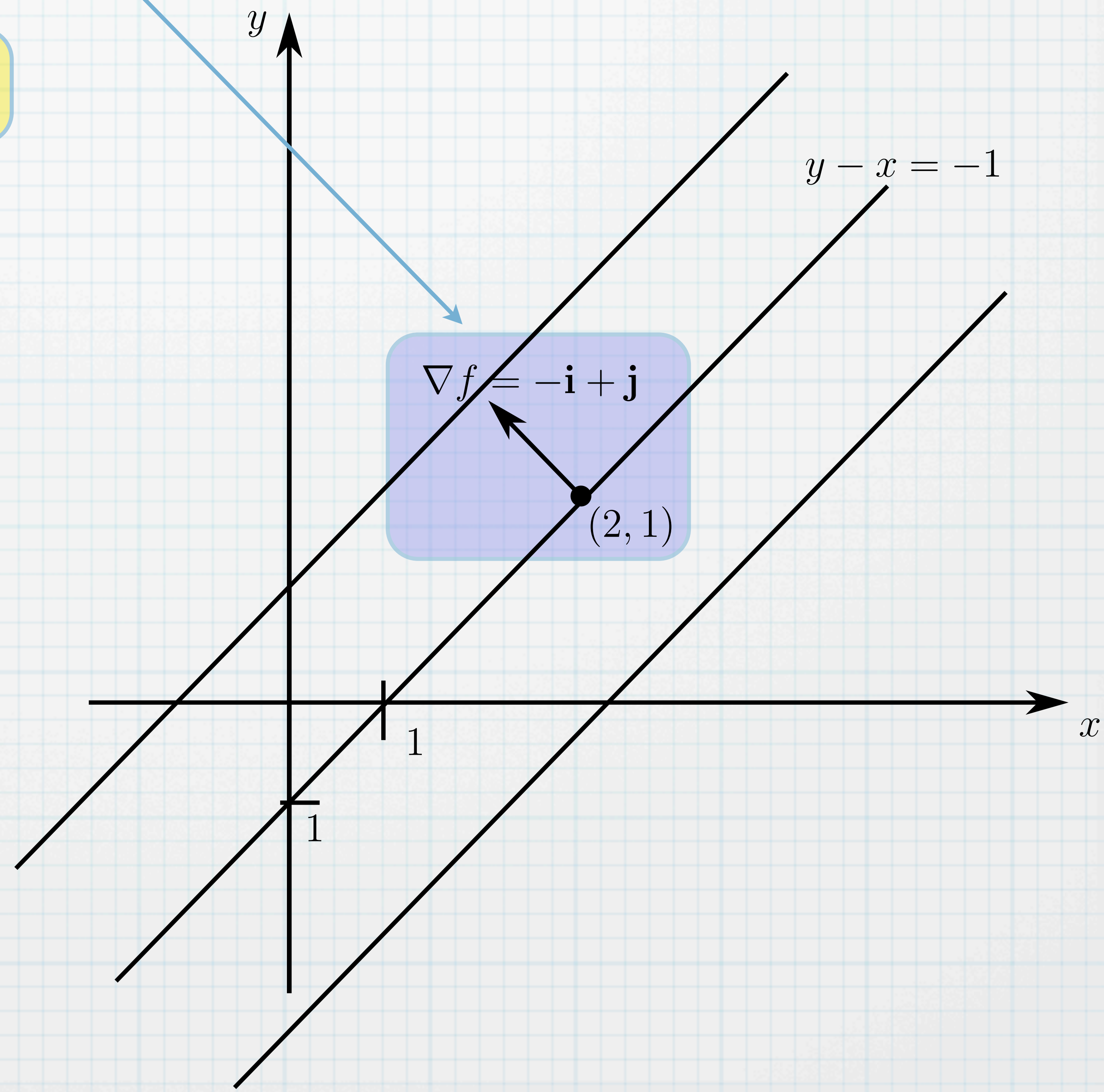


a) $f(x,y) = y - x;\ (2,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \Rightarrow \nabla f = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$z_0 = f(2,1) = -1$ **nivel**

$-1 = y - x$ **Curvas de nivel**



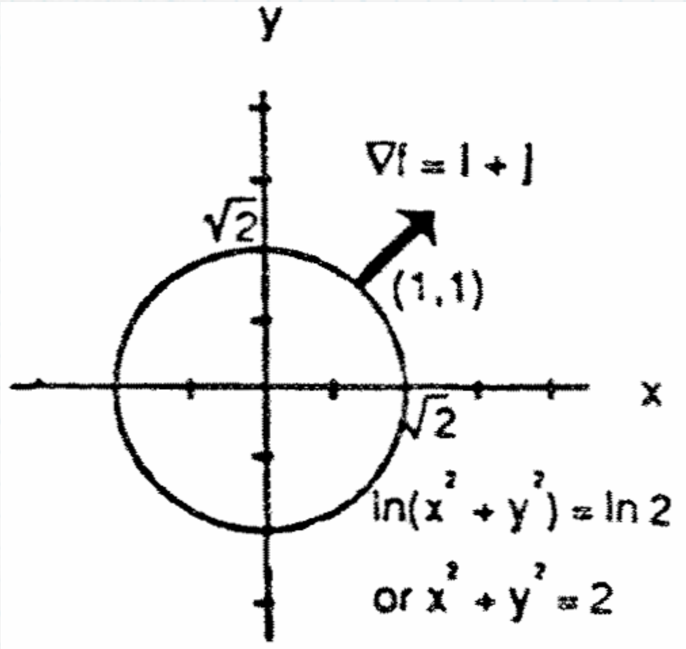
b) $f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$; $(1, 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1; \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1$$

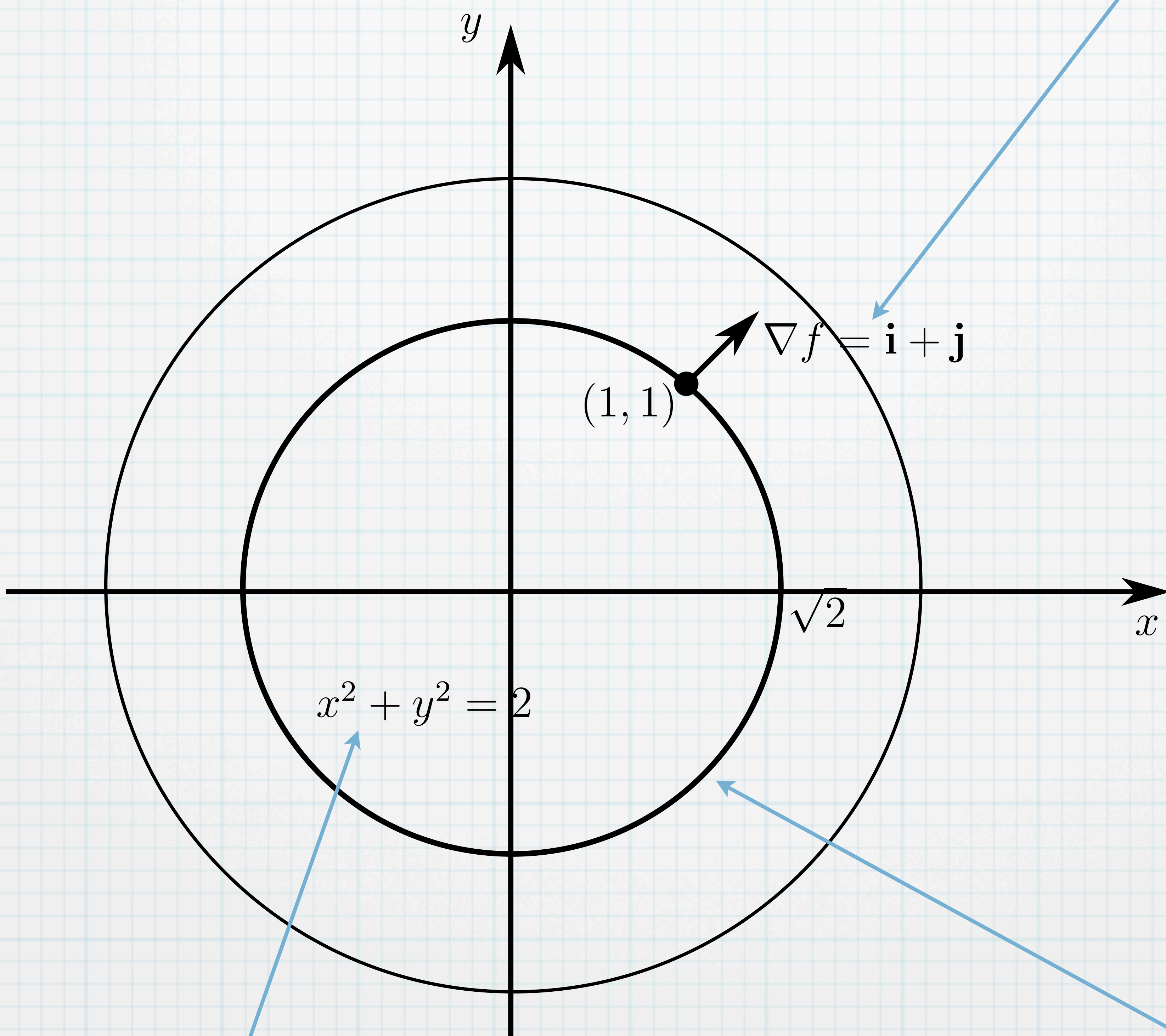
$$\Rightarrow \quad \nabla f = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$z_0 = f(1, 1) = \boxed{\ln(2) \text{ nivel}}$

$\ln(2) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ → $\boxed{2 = x^2 + y^2 \quad \text{Curvas de nivel}}$

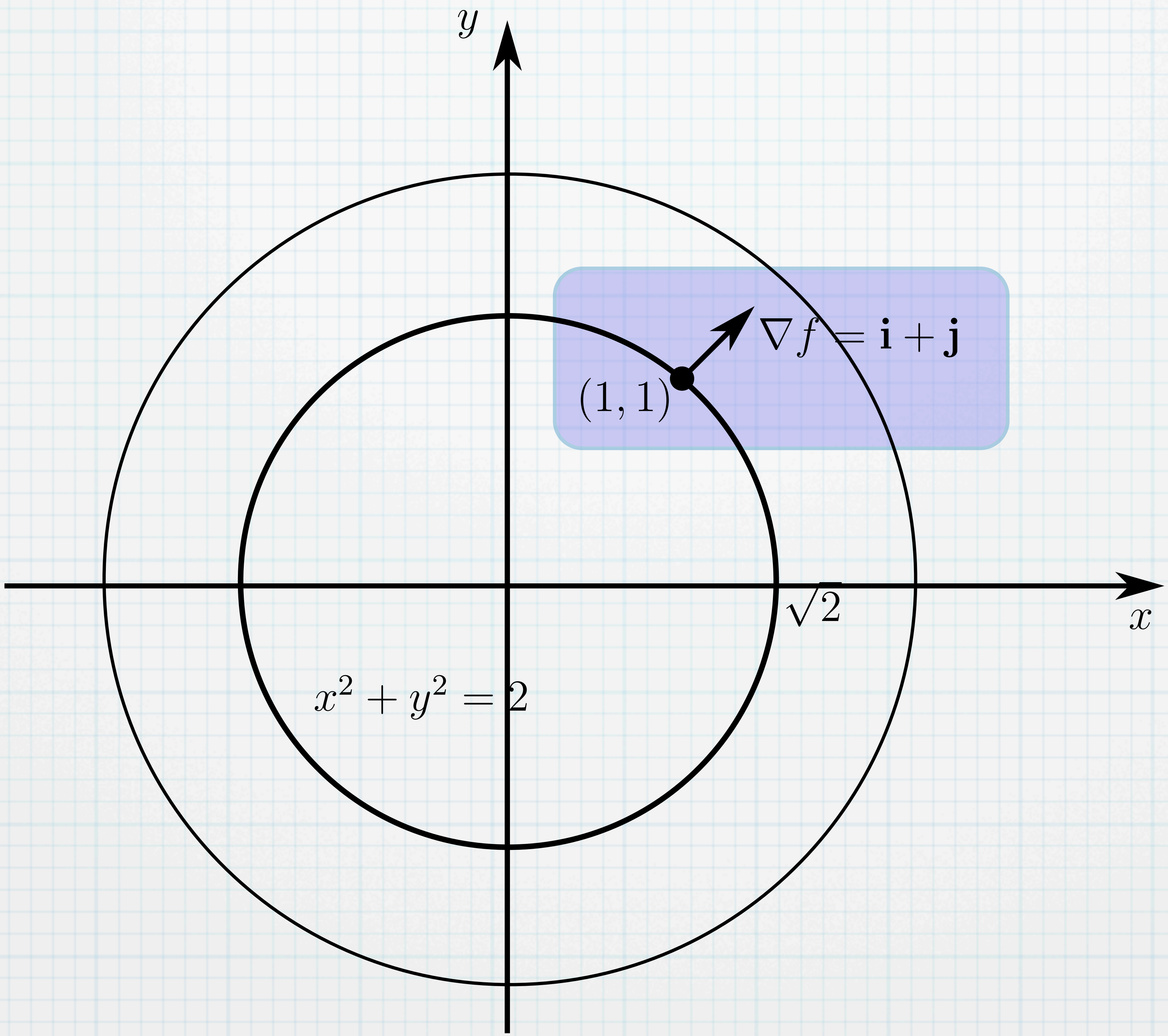


$\Rightarrow \quad \nabla\, \mathrm{f} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$



$2 = x^2 + y^2$ **Curvas de nivel**

$z_0 = f(1,1) = \ln(2)$ **nivel**


y
$\nabla f = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
$(1,1)$
$\sqrt{2}$
x
$x^2 + y^2 = 2$

problema 2.

En cada caso hallar la derivada en el punto P y en la dirección A

a) $f(x,y) = 2xy - 3y^2, \; P(5,5), \; \mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

b) $h(x,y,z) = \cos(xy) + e^{xy} + \ln(zx), \; P\left(1, 0, \frac{1}{2}\right), \; \mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

Ejercicio 2

a) $f(x,y) = 2xy - 3y^2,\ P(5,5),\ \mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y \Rightarrow \frac{\partial f(5,5)}{\partial x} = 10$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 6y \Rightarrow \frac{\partial f(5,5)}{\partial y} = -20$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla f = 10\mathbf{i} - 20\mathbf{j}}$$

$$\widehat{A} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{4\mathbf{i}+3\mathbf{j}}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{4}{5}\,\mathbf{i} + \frac{3}{5}\,\mathbf{j}$$ vector unitario

$$\nabla f \cdot \widehat{A} = 10\left(\frac{4}{5}\right) - 20\left(\frac{3}{5}\right) = -4$$

Ejercicio 3.

Para las siguientes funciones halle la dirección de mas rápido crecimiento y decrecimiento, en el punto P:

a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2, \; P(-1,1)$

b) $f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2 - 1\right) + y + 6z, \; P(1,1,0)$

Problema 3.

En los siguientes casos, haga un esquema de: las curvas de nivel, el gradiente, y la recta tangente en el punto dado. Luego escriba la ecuación de la recta tangente.

a) $x^2 + y^2 = 4, \ \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

b) $x^2 - xy + y^2 = 7, \ (-1, 2)$

Ejercicio 4

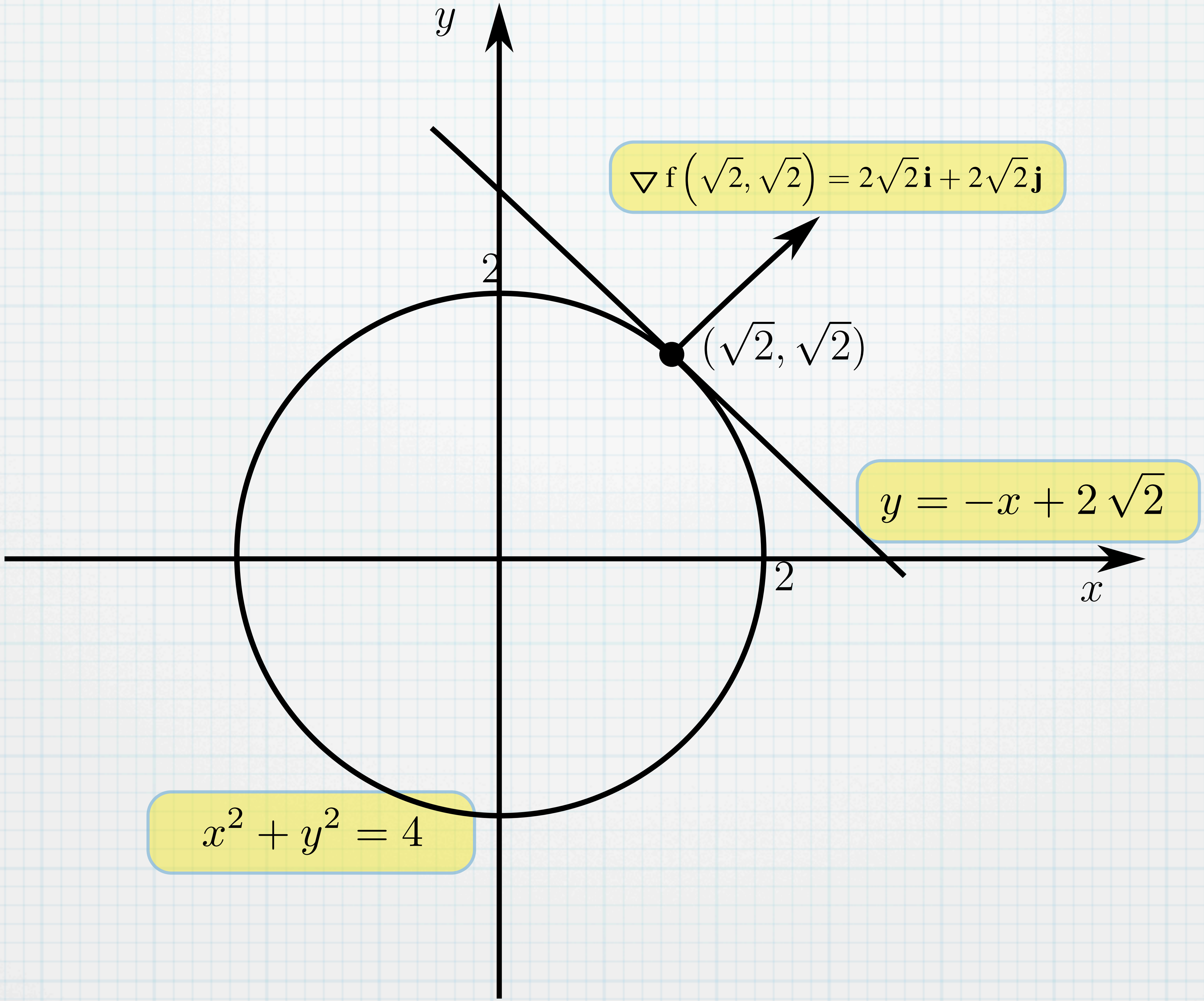
a) $x^2 + y^2 = 4, \quad \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

$$\nabla \mathrm{f} = 2\mathrm{x}\mathbf{i} + 2\mathrm{y}\mathbf{j} \Rightarrow \nabla \mathrm{f}\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \boxed{2\sqrt{2}\,\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\,\mathbf{j}}$$

$$\nabla f\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\boxed{2\sqrt{2}\left(\mathrm{x} - \sqrt{2}\right) + 2\sqrt{2}\left(\mathrm{y} - \sqrt{2}\right) = 0}$$

$$\mathbf{v} = \left(x - \sqrt{2}\right)\mathbf{i} + \left(y - \sqrt{2}\right)\mathbf{j}$$


y
$\nabla f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}\,\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\,\mathbf{j}$
2
$(\sqrt{2},\sqrt{2})$
$y = -x + 2\sqrt{2}$
2
x
$x^2 + y^2 = 4$

Ejercicio 5.

¿en que dirección es la derivada de

$$f(x,y) = xy + y^2, \text{ en } P(3,2)$$

igual a cero?

r)

$$\mathbf{v} = \frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$$

$$-\mathbf{v} = -\frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$$

Ejercicio 6.

Dada una constante k y los gradientes

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{k}$$

Demuestre:

a) $\nabla(k\, f) = k\,\nabla\, f$

b) $\nabla(f\, g) = g\,\nabla\, f + f\,\nabla\, g$

c) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\nabla\, f - f\,\nabla\, g}{g^2}$

Problema 4.

Calcule: la ecuación del plano tangente y la linea perpendicular a este plano para cada función en el punto indicado.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3, \;\; P_0(1,1,1)$

b) $\cos(\pi x) - x^2 y + e^{xz} + yz = 4, \;\; P_0(0,1,2)$

Ejercicio 7

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad P_0(1,1,1)$

$$\nabla \mathrm{f} = 2\mathrm{x}\mathbf{i} + 2\mathrm{y}\mathbf{j} + 2\mathrm{z}\mathbf{k} \;\Rightarrow\; \boxed{\nabla \mathrm{f}(1,1,1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}$$

Vector perpendicular al gradiente

$$(x-1, y-1, z-1)$$

Ecuación del plano tangente

$$\nabla f(1,1,1) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0$$

$$2(\mathrm{x}-1) + 2(\mathrm{y}-1) + 2(\mathrm{z}-1) = 0$$

$$\Rightarrow x + y + z = 3$$

Linea perpendicular:

$$\mathrm{x} = 1 + 2\mathrm{t},\ \mathrm{y} = 1 + 2\mathrm{t},\ \mathrm{z} = 1 + 2\mathrm{t}$$

$$(1 + 2t, 1 + 2t, 1 + 2t)$$